zDynamics

Estabilidad de Sistemas Dinámicos

De los Polos y Ceros a la Teoría de Estabilidad de Lyapunov

La *estabilidad* es la capacidad que tienen los sistemas dinámicos para mantenerse en equilibrio o regresar a su posición natural cuando son afectados por una perturbación.

Para los sistemas de control, ¿cómo se puede saber si son estables a partir de la ecuación que modela su comportamiento?

Puntos Clave

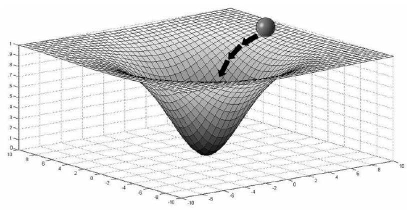
- **Estabilidad**: capacidad que tienen los sistemas dinámicos para mantenerse en equilibrio o regresar a su posición natural.
- **Punto de Equilibrio**: lugar donde el sistema dinámico se encuentra en reposo, es decir, su comportamiento no cambia.
- **Sistema de Control**: conjunto de elementos que permiten ajustar el comportamiento de un sistema.

zDynamics | The Future is ROBOTICS
contact@zdynamics.org

• **Control de Sistemas Dinámicos**: Aprende las bases sobre cómo controlar, estimar y sintonizar automáticamente los parámetros de un sistema

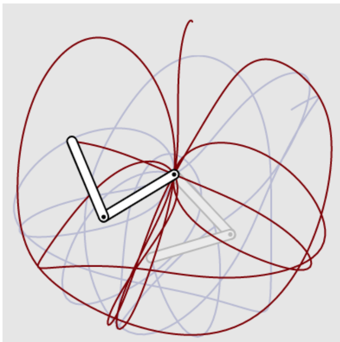
• **Robótica, de la Cinemática al Control**: La robótica explicada más allá de las matrices de transformación homogénea. Con herramientas útiles para tu aprendizaje, investigaciones o proyectos

La estabilidad de un sistema depende de múltiples factores como sus parámetros físicos, las condiciones del entorno donde se encuentra, perturbaciones externas, pérdidas de energía por rozamiento, etcétera; sin embargo, **la medición de parámetros físicos no es cien por ciento precisa, y tampoco es posible medir pérdidas energéticas de forma directa**, por lo que esto no es una fuente de información para saber si un sistema es estable.



Ejemplo de estabilidad de un sistema: este encontrará el equilibrio al estar en el fondo de la superficie.
The Intrinsic Dynamics of Psychological Process, Current Directions in Psychological Science, DOI: 10.1177/0963721414551571, 2015

Quienes estudian sistemas dinámicos y su control han establecido que **las señales** $u\left(t\right)$ **pueden estabilizar su comportamiento natural**, sin embargo, **esto no significa que serán estables cuando una perturbación los afecte**.



Ejemplo de un sistema con perturbación: su comportamiento se vuelve caótico y no se mantiene en el punto de equilibrio.
"Double Trouble": the Double Pendulum, © Dirk Brockmann, Complexity Explorables, 2020

Asimismo, también se ha desarrollado teoría sobre estados estable y transitorio, conteo de oscilaciones, amplitud del sobre tiro, factor de amortiguamiento, etcétera, **pero su uso en entornos industriales puede ser complicado cuando se tratan de resolver problemas en el menor tiempo posible**.

Además, **es difícil garantizar la estabilidad de sistemas a partir de la observación directa de su comportamiento**, ya que la observación tendría que realizarse durante todo su ciclo de funcionamiento. Por esta razón **existen herramientas matemáticas que, a partir de la ecuación de un sistema dinámico, definen si será estable para cualquier instante de tiempo, aun cuando alguna perturbación lo afectara**.

Introducción

Cuando describimos el Controlador PID, se estableció que la señal de control $u(t)$ se utiliza para acotar el error a partir de su ecuación dinámica $\dot{e}(t) = -\dot{x}(t)$, lo que daría como resultado una solución de la forma

$$e(t) = e(0) \cdot \mathrm{e}^{-k \cdot t}; \tag{1}$$

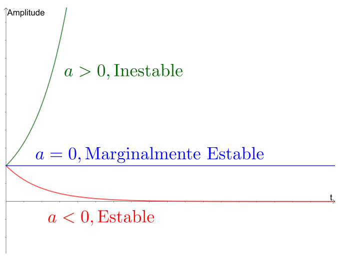
esto significa que el error es estable, ya que tiende a cero conforme $t \to +\infty$; entonces **se puede estudiar la estabilidad natural de un sistema dinámico al conocer su solución**. Supongamos que este se describe como

$$\dot{x}(t) = a \cdot x(t), \tag{2}$$

para conocer $x(t)$, basta con utilizar la Transformada de Laplace

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= a \cdot X(s) \\ X(s) &= \frac{x(0)}{s-a} \\ x(t) &= x(0) \cdot \mathrm{e}^{a \cdot t}. \end{aligned} \tag{3}$$

Este resultado puede tener diferentes comportamientos de acuerdo al valor de a:



Categorización de la estabilidad para $x(t)$

sin embargo, **no es posible ajustar a, ya que este depende de los parámetros físicos del sistema**; en la mayoría de los casos están asociados a coeficientes como masa, densidad, etcétera, los cuales son valores positivos debido a su naturaleza. Además, **el punto de equilibrio natural del sistema está en $x = 0$, que es hacia donde convergería si** $a < 0$, sin embargo, se puede utilizar una señal de control en la ecuación (2) para complementar el valor de a, lo que permitiría alcanzar el punto de equilibrio natural; entonces, **¿cómo puedo saber si este nuevo sistema es estable?** Supongamos que se utiliza una señal de control $u(t)$

$$\dot{x}(t) = a \cdot x(t) + u(t), \tag{4}$$

donde $x(t)$ depende de $u(t)$, pero definir esta relación en el dominio del tiempo es complicado, sin embargo, podemos analizarla representando la ecuación (4) en el dominio de la frecuencia

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= a \cdot X(s) + U(s) \\ X(s) &= \frac{x(0)}{s-a} + \frac{U(s)}{s-a}. \end{aligned} \tag{5}$$

No se recomienda eliminar condiciones iniciales cuando se controlen sistemas en entornos industriales, ya que pueden causar problemas o accidentes por errores en los ajustes de sus parámetros. Para fines didácticos, se considera que $x(0) = 0$, entonces, la relación entre el comportamiento del sistema y su señal de entrada es

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s-a} \tag{6}$$

donde $G(s)$ es la función de transferencia del sistema, la cual permite conocer su estabilidad al relacionar la señal de entrada y el comportamiento resultante; pero, **¿cómo se podría estudiar la estabilidad a partir de la función de transferencia?**

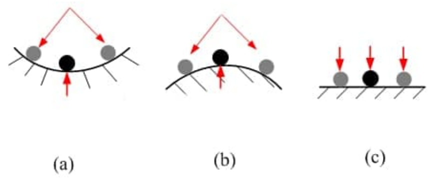
#MásQueTeoría

- El análisis de estabilidad en sistemas dinámicos permite saber si su comportamiento natural alcanzará una posición de equilibrio $x(t) = c$, es decir

  $$\lim_{t \to +\infty} x(t) = c,$$

  donde $x(t)$ representa la solución de $\dot{x}(t) = a \cdot x(t)$, siendo c el punto de equilibrio del sistema (e.g. $c = 1{,}3$)

- La estabilidad puede categorizarse de tres maneras:

  a) Estable: ocurre cuando el sistema alcanza la misma posición de equilibrio aun después de ser perturbado en múltiples ocasiones

  b) Inestable: si el sistema es perturbado, pierde la posición de equilibrio y ya no puede regresar a ella

  c) Marginalmente estable: al ser perturbado, el sistema alcanza el equilibrio en cualquier punto, cada uno diferente del otro

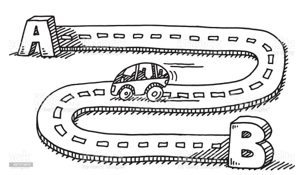
- Algebraicamente, las raíces de una ecuación de segundo grado son aquellos valores de x donde la ecuación es igual a cero

  $$x^2 + 9x + 14 = 0$$
  $$\implies x_1 = 7, x_2 = 2$$

  De forma similar, la estabilidad de un sistema dinámico se encuentra cuando $\dot{x}(t) = 0$, ya que la solución a esta ecuación diferencial es $x(t) = c$

#DatoDeAmor

Imagina que el desplazamiento de un vehículo entre los puntos A y B está dado por la función $s(t)$, entonces su velocidad (modelo dinámico) es $\dot{s}(t)$



Si la velocidad es cero, el desplazamiento del vehículo es constante, i.e. el sistema está en equilibrio, ¡esto es la estabilidad!

#MásQueTeoría

- Encontrar los *polos* y *ceros* dada una función de transferencia $G(s)$ permite simplificarla en una suma de fracciones parciales de la forma
  $G(s) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{B_i}{s-p_i}\right)$,
  donde B_i estará determinada por cada valor de z_i y la descomposición en fracciones parciales de $G(s)$
- Es posible conocer la respuesta de un sistema al utilizar el valor de los polos p_i en la forma homogénea de la solución de una ecuación diferencial lineal, i.e.
  $x(t) = \sum_{i=1}^{n} (c_i \cdot \mathrm{e}^{p_i \cdot t})$,
  siendo c_i la constante que puede ser calculada a partir de las condiciones iniciales del sistema, mientras que $\mathrm{e}^{p_i \cdot t}$ es una función exponencial
- La representación anterior es válida cuando los valores de p_i son reales y se encuentran entre $-\infty \leq p_i \leq +\infty$, sin embargo, la solución puede expandirse cuando p_i están conformado por una parte real y una imaginaria, es decir
  $p_i = \alpha \pm \omega j$,
  entonces la ecuación se expande como
  $x(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[c_i \cdot \mathrm{e}^{(\alpha_i \pm \omega_i j) \cdot t}\right]$,
  la cual puede expresarse en términos de $\cos(\omega_i t)$ y $\sin(\omega_i t)$ gracias a la Ecuación de Euler
  $\mathrm{e}^{\pm \omega_i j \cdot t} = \cos(\omega_i t) \pm \sin(\omega_i t)$
- Los términos exponenciales $\mathrm{e}^{p_i \cdot t}$ y $\mathrm{e}^{\alpha_i \cdot t}$ acotarán el comportamiento del sistema dinámico si $p_i < 0$ y $\alpha_i < 0$, lo que garantizaría la estabilidad del sistema

#DatoDeAmor

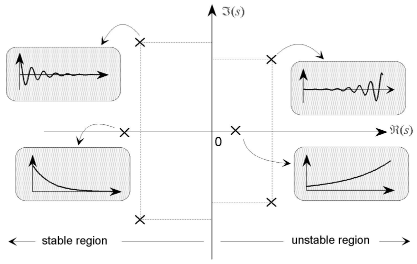
La linealización de una ecuación diferencial puede ser conveniente cuando se sabe que el comportamiento del sistema se encontrará acotado dentro de un rango donde la respuesta es lineal, sin embargo, esto limita el estudio de estabilidad ya que los sistemas en entornos reales no son lineales, sin embargo, **¡la Teoría de Estabilidad de Lyapunov permite analizar la estabilidad de sistemas lineales y no lineales!**

(Brevísimo) Análisis de Estabilidad con Polos y Ceros

La función de transferencia determina características importantes del sistema dinámico sin resolver la ecuación diferencial lineal asociada, e.g. ecuación (4); esto se logra al factorizar los polinomios en su numerador (**ceros**) y denominador (**polos**)

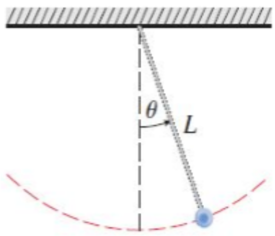
$$G(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_0} = K \cdot \frac{(s-z_m)(s-z_{m-1})\cdots(s-z_1)}{(s-p_n)(s-p_{n-1})\cdots(s-p_1)}, \quad (7)$$

donde los polos p_i definen la estabilidad entre la señal de entrada y la respuesta del sistema; junto con los ceros z_i y la constante $K = \frac{a_m}{b_n}$, caracterizan completamente al sistema dinámico. Estos parámetros pueden ser reales o imaginarios, y son ubicados en un plano de acuerdo a su valor; **ya que p_i son los parámetros que definen la estabilidad de un sistema, estos son representados con un símbolo** $\times$ de la siguiente manera



Representación Gráfica de los polos p_i y respuesta del sistema dinámico de acuerdo a su ubicación
Understanding Poles and Zeros, Massachusetts Institute of Technology, Department of Mechanical Engineering

donde su parte imaginaria, si existiera, se colocaría sobre el eje de las ordenadas, mientras que el eje de las abscisas es utilizado para ubicar su parte real. Aunque en este diagrama también se ubican los ceros, se omite su representación ya que son utilizados para el diseño de controladores por **el método del lugar de raíces**, lo cual está fuera del alcance de este folleto, ya que **solamente puede ser implementado en sistemas lineales, lo que limita el análisis de estabilidad para sistemas más complejos**. Entonces, **¿cómo puedo estudiar la estabilidad de un sistema lineal?** Considera que se trabaja con este péndulo simple



Péndulo simple

cuya representación matemática es

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = u(t) \,. \quad (8)$$

El análisis de estabilidad con Polos y Ceros no puede realizarse, por lo que se linealiza el término $\sin\theta$ al considerar que el movimiento del péndulo se encuentra acotado entre $-0{,}5 \leq \theta \leq 0{,}5$ radianes, ya que es la región donde la función tiene un comportamiento lineal, por lo que esta puede reescribirse como

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = u(t) \,, \quad (9)$$

donde la relación entre $u(t)$ y $\theta(t)$ es

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + \frac{g}{l}}, \quad (10)$$

lo que da como resultado que el sistema tenga un cero en $z_1 = 1$ y dos polos imaginarios $p_{1,2} = 0 \pm \sqrt{\frac{g}{l}} j$. Debido a que la parte real de $p_{1,2}$ se encuentra en el origen, el sistema es **marginalmente estable**, ya que se encontrará oscilando sobre los mismos puntos en cada ciclo del péndulo.

Teoría de Estabilidad de Lyapunov

El análisis de estabilidad con Polos y Ceros está limitado a sistemas dinámicos lineales, y la mayor parte de los modelos matemáticos para sistemas reales son no lineales. Gracias Aleksandr Mikhailovich Lyapunov fue posible estudiar la estabilidad de sistemas lineales y no lineales.

Considera que **una función vectorial** $f(t, \mathrm{x})$, lineal o no lineal, **puede tener múltiples puntos de equilibrio** x_p, tal que $f(t, \mathrm{x}_p) = 0$. Si un sistema dinámico se expresa como

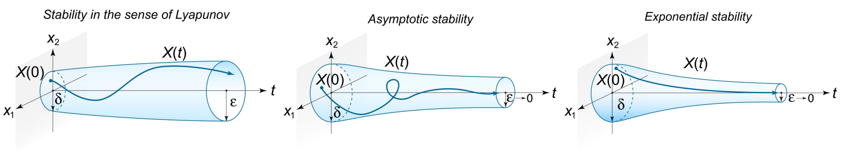
$$\begin{gathered} \dot{\mathrm{x}}(t) = f(t, \mathrm{x}) \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \cdots & \dot{x}_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1) & f_2(t, x_2) & \cdots & f_n(t, x_n) \end{bmatrix}^T, \end{gathered} \tag{11}$$

entonces sus puntos de equilibrio x_p ocasionarían que

$$\dot{\mathrm{x}}(t) = f(\mathrm{x}_p) = 0 \implies \mathrm{x}(t) = \mathrm{c}, \tag{12}$$

esto significa que el sistema dinámico es estable y alcanza la convergencia. Sin embargo, **Lyapunov consideró que no todos los sistemas dinámicos podrían tener este comportamiento ideal**, ya que no es tan simple conocer sus puntos de equilibrio; por lo tanto, **su convergencia dependería de que las soluciones propuestas, o puntos de equilibrio supuestos, se encontraran cerca de una región donde**, después de tiempo determinado, **se acercarían al punto de equilibrio deseado y en algunas ocasiones lo alcanzarían**.

Su teoría, desarrollada detalladamente en su tesis doctoral, establece tres tipos de estabilidad:



Representación gráfica de la Estabilidad a) en el Sentido de Lyapunov, b) Asintótica y c) Exponencial
Basic Concepts of Stability Theory, Alex Svirin, PhD (math24.net)

- ❑ **Estabilidad en el Sentido de Lyapunov**: es aquella donde el conjunto de soluciones $\varphi(t)$ (color azul) y la respuesta $\mathrm{x}(t)$ de la ecuación (11) comienzan en $\varphi(0)$ y $\mathrm{x}(0)$, lo que genera una distancia δ lo suficientemente cerca de x_p que se mantiene a ϵ unidades del punto de equilibrio, pero nunca lo alcanza

$$|\mathrm{x}(0) - \varphi(0)| < \delta \implies |\mathrm{x}(t) - \varphi(t)| < \epsilon \tag{13}$$

- ❑ **Estabilidad Asintótica**: en comparación con la anterior, el conjunto de soluciones $\varphi(t)$ y la respuesta del sistema $\mathrm{x}(t)$ se encuentran lo suficientemente cerca del punto de equilibrio y eventualmente lo alcanzan cuando el tiempo tiende a infinito

$$|\mathrm{x}(0) - \varphi(0)| < \delta \implies \lim_{t \to +\infty} |\mathrm{x}(t) - \varphi(t)| = 0 \tag{14}$$

- ❑ **Estabilidad Exponencial**: ocurre cuando el conjunto de soluciones $\varphi(t)$ y la respuesta del sistema $\mathrm{x}(t)$ se encuentran cerca del punto de equilibrio y convergen a una tasa de cambio exponencial

$$|\mathrm{x}(0) - \varphi(0)| < \delta \implies |\mathrm{x}(t) - \varphi(t)| \leq \alpha |\mathrm{x}(0) - \varphi(0)| \, \mathrm{e}^{-\beta t} \tag{15}$$

El conjunto de soluciones $\varphi(t)$ **representa la región en donde las posibles respuestas del sistema** $\mathrm{x}(t)$ **evolucionarían**; esta región, o acotamiento, se determina por las finitas condiciones iniciales o parámetros del sistema dinámico. **En el caso de sistemas en entornos reales, no es factible definir estas regiones ya que se tendrían que analizar las finitas respuestas del sistema**, sin embargo, su representación matemática permite entender el concepto de estabilidad.

#MásQueTeoría

- ❑ Es común que las ecuaciones diferenciales sean descritas de forma explícita, e.g.

  $y' = \frac{dy}{dx} = x^2,$

  sin embargo, las ecuaciones que modelan sistemas dinámicos suelen ser descritas en forma implícita, ya que las variables del sistema evolucionan en función del tiempo, es decir

  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \cos(\theta(t)),$

  donde $f(t, \theta) = \cos(\theta(t))$. Se considera que este tipo de ecuaciones es **autónomo**, ya que el lado derecho de la ecuación no contienen **explícitamente** la variable independiente t

- ❑ Al utilizar controladores, se busca acercar la respuesta del sistema $\mathrm{x}(t)$ a un punto deseado x_d, i.e.

  $\lim_{t \to +\infty} \mathrm{x}(t) = \mathrm{x}_d,$

  sin embargo, puede que cause inestabilidad en $\mathrm{x}(t)$. Por esta razón, el análisis en sistemas de control se establece utilizando el comportamiento del error

  $e(t) = \mathrm{x}_d - \mathrm{x}(t),$

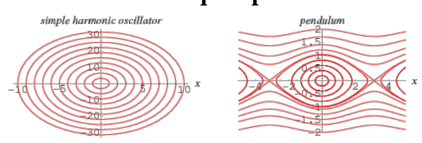
  de tal manera que

  $\lim_{t \to +\infty} e(t) = 0,$

  el cual tiene un único punto de equilibrio exactamente en cero, lo que permite cumplir con cualquiera de las tres condiciones de estabilidad fácilmente

#DatoDeAmor

Conocer los puntos de equilibrio de un sistema puede ser algo complejo si existen términos no lineales en la ecuación diferencial, sin embargo, **un retrato de fase permite observar el comportamiento del sistema en todo su ciclo de funcionamiento y todas sus posibles soluciones de acuerdo a las múltiples condiciones iniciales que puedan existir.**



Retrato de fase del conjunto de soluciones de la ecuación diferencial a) de un péndulo simnple linealizado y b) de su forma no lineal
Phase Portrait From MathWorld – A Wolfram Web Resource, Eric W. Weisstein

Este se obtiene al graficar la relación entre la dinámica del sistema $\dot{\mathrm{x}}(t)$ y su respuesta $\mathrm{x}(t)$ utilizando un bloque xy graph en Simulink

Bloque xy graph en Simulink
XY Graph, The MathWorks, Inc.

#MásQueTeoría

- La forma cuadrática de una función vectorial $f(t, \mathrm{x})$, definida matemáticamente como

  $Q(t, \mathrm{x}) = f(t, \mathrm{x})^T f(t, \mathrm{x})$,

  es utilizada para clasificar los puntos estacionarios, es decir, máximos, mínimos y puntos de inflexión, lo cual se interpreta como los puntos donde

  $\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}} = \nabla(Q(t, \mathrm{x})) = 0$,

  siendo $\nabla(\cdot)$ el gradiente de la función, es decir, su derivada en un espacio vectorial

- El gradiente de una función $Q(t, \mathrm{x})$ en un espacio vectorial, i.e. un espacio con n variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$, se define como su derivada respecto a cada una de las variables

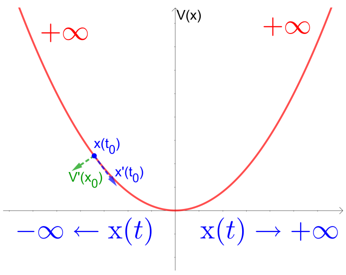
  $\nabla(Q(t, \mathrm{x})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial Q}{\partial x_n} \end{bmatrix}$

  Esto representa la dirección y razón de cambio de la función alrededor de un punto

- Una función definida positiva es aquella cuyo punto de equilibrio se encuentra en el origen y sus valores numéricos crecen al infinito con una amplitud positiva. Su forma más básica y ampliamente utilizada es una función cuadrática

#DatoDeAmor

$V(\mathrm{x}(t))$ **debe ser definida positiva**, ya que debe acotar el comportamiento de $\mathrm{x}(t)$ cuando este se encuentra entre $\pm\infty$, además, su punto de equilibrio se encuentra en el origen



Para que un sistema pueda ser acotado por esta función hasta alcanzar el punto de equilibrio, **este también debe estar en el origen**, por lo que su aplicación en sistemas de control se basa en considerar al error $\mathrm{e}(t)$ como el sistema dinámico a estabilizar, ya que, **sin importar la ecuación de $\dot{\mathrm{x}}(t)$, el punto de equilibrio del error siempre será cero**

Método de Lyapunov para Análisis de Estabilidad

Las ecuaciones (13) a (15) son la definición formal de los tres tipos de estabilidad de Lyapunov, sin embargo, utilizarlas en cada sistema dinámico es complicado ya que se deben calcular ϵ, δ y $\varphi(t)$; entonces, **¿cómo se puede conocer la estabilidad de un sistema dinámico sin utilizar estos formalismos?** Partiendo de la ecuación (11), se puede definir la forma cuadrática de $f(t, \mathrm{x})$ como

$$f(t, \mathrm{x})^T \dot{\mathrm{x}} = f(t, \mathrm{x})^T f(t, \mathrm{x}), \tag{16}$$

esto permite operar la ecuación al considerar que $\dot{\mathrm{x}} = \frac{d\mathrm{x}}{dt}$:

$$f(t, \mathrm{x})^T d\mathrm{x} = f(t, \mathrm{x})^T f(t, \mathrm{x})\, dt. \tag{17}$$

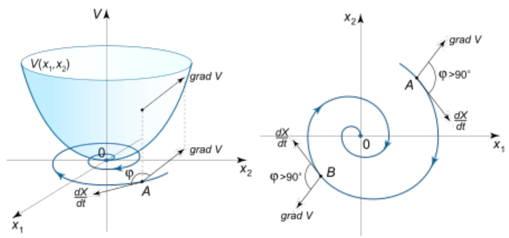
Por los términos diferenciales en ambos lados de la ecuación, esta debe resolverse obteniendo la integral de cada uno

$$\int_{\mathrm{x}_0} f(t, \mathrm{x})^T d\mathrm{x} = \int_0^{+\infty} f(t, \mathrm{x})^T f(t, \mathrm{x})\, dt, \tag{18}$$

donde $\int_0^{+\infty} f(t, \mathrm{x})^T f(t, \mathrm{x})\, dt$ **es una función definida positiva**, esto significa que **sus resultados numéricos serán positivos conforme $t \to +\infty$**

$$\int_0^{+\infty} f(t, \mathrm{x})^T f(t, \mathrm{x})\, dt > 0. \tag{19}$$

Asimismo, $\int_{\mathrm{x}_0} f(t, \mathrm{x})^T d\mathrm{x}$ **es la Función Candidata de Lyapunov**, la cual **acota el sistema dinámico**, considerando sus condiciones iniciales x_0, **de tal forma que ambas evolucionarán hasta alcanzar el punto de equilibrio localizado en el origen**



Representación gráfica de la Función Candidata de Lyapunov a) para un sistema dinámico con dos estados y b) su retrato de fase en $x_1(t) - x_2(t)$, donde se observa que el comportamiento com,ienza en A y evoluciona hasta alcanzar el punto de equilibrio
Method of Lyapunov Functions, Alex Svirin, PhD (math24.net)

Esto significa que **el comportamiento del $V(\mathrm{x})$ y $\mathrm{x}(t)$ comenzarán en el extremo superior de la copa y decrecerán hasta que su valor sea cero** debido a que $\dot{V}(\mathrm{x})$ es decreciente. Con esto, es posible reescribir la ecuación (18) como

$$V(\mathrm{x}) = \int_{\mathrm{x}_0} f(t, \mathrm{x})^T d\mathrm{x} > 0, \tag{20}$$

$$\dot{V}(\mathrm{x}) < 0, \tag{21}$$

lo que establece que **la Función Candidata de Lyapunov $V(\mathrm{x})$ debe ser definida positiva**. Además, **la evolución de $\dot{V}(\mathrm{x})$ tiene que ser definida negativa para garantizar que $V(\mathrm{x})$ evolucionará hasta cero**. Esto se define matemáticamente como

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \mathrm{x}} &= \nabla(V(\mathrm{x})) \\ \frac{\partial V}{\partial \mathrm{x}} \left(\frac{\partial t}{\partial t} \right) &= \nabla(V(\mathrm{x})) \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= \nabla(V(\mathrm{x})) \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial t} \implies \dot{V}(\mathrm{x}) = \nabla(V(\mathrm{x}))\, \dot{\mathrm{x}} < 0, \end{aligned} \tag{22}$$

donde $\nabla(V(\mathrm{x}))$ **es el gradiente de la Función Candidata de Lyapunov**, el cual se calcula con el resultado obtenido al utilizar la ecuación (20). Con toda esta teoría, **¿cómo se puede saber si un sistema dinámico es estable?**

#MásQueTeoría

- ❑ Se considera que la función $f(t, \mathrm{x})$ de la ecuación (23) es
  $$f(t, \mathrm{x}) = \mathrm{x}(t),$$
  ya que simplifica el cálculo de $V(\mathrm{x})$ al excluir términos invariantes en el tiempo

- ❑ Derivar o integrar vectores y matrices se simplifica al expandir los términos que se vean involucrados en la operación. La ecuación (24) puede resolverse al expandir el producto como
  $$\mathrm{x}(t)^T d\mathrm{x}(t) = x_1 dx_1 + \cdots + x_n dx_n.$$
  Debido a la linealidad en integrales, cada término puede operarse individualmente
  $$\int_{\mathrm{x}_0} \mathrm{x}(t)^T d\mathrm{x}(t) = \tfrac{1}{2}x_1^2 + \cdots + \tfrac{1}{2}x_n^2,$$
  lo cual da como resultado un producto entre dos vectores

#DatoDeAmor

Una Función Candidata de Lyapunov se expresa de forma cuadrática, la cual asemeja a las ecuaciones de Energía Cinética, e.g. una masa que se desplaza linealmente tiene una energía cinética $E_c = \frac{1}{2}mv(t)^2$, entonces, su Función Candidata de Lyapunov sería $V(v(t)) = \frac{1}{2}v(t)^2$. Por lo tanto, **¡la Teoría de Estabilidad de Lyapunov considera que un sistema dinámico disipa energía mientras evoluciona en el tiempo, cuando esta es constante, el sistema está en equilibrio!**

Conclusión

La Teoría de Estabilidad de Lyapunov permite analizar sistemas dinámicos sin la necesidad de limitar su comportamiento al linealizar sus modelos matemáticos, esto garantiza que será estable durante todo su ciclo de funcionamiento, **incluso al ser sometido a perturbaciones o parámetros dinámicos no modelados**, pero eso se analizará en el siguiente artículo ◡̈

¡Queremos ayudarte!

Escríbenos a contact@zdynamics.org o envíanos un mensaje por WhatsApp al +523320807567 si quieres que te apoyemos con la investigación y desarrollo de tus proyectos

Análisis de Estabilidad de Sistemas Dinámicos

Para saber si un sistema dinámico en espacio de estados

$$\dot{\mathrm{x}}(t) = \mathrm{A}\mathrm{x}(t) = \mathrm{A}f(t, \mathrm{x}) \tag{23}$$

es estable, se utiliza la ecuación (20) para conocer su Función Candidata de Lyapunov

$$V(\mathrm{x}) = \int_{\mathrm{x}_0} f(t, \mathrm{x})^T d\mathrm{x} = \int_{\mathrm{x}_0} \mathrm{x}(t)^T d\mathrm{x}(t) = \frac{1}{2}\mathrm{x}(t)^T \mathrm{x}(t). \tag{24}$$

Al ser una función cuadrática, esta es definida positiva por naturaleza, entonces puede derivarse en función del tiempo para conocer $\dot{V}(\mathrm{x})$

$$\dot{V}(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}\dot{\mathrm{x}}(t)^T \mathrm{x}(t) + \frac{1}{2}\mathrm{x}(t)^T \dot{\mathrm{x}}(t) = \mathrm{x}(t)^T \dot{\mathrm{x}}(t) = \mathrm{x}(t)^T \mathrm{A}\mathrm{x}(t), \tag{25}$$

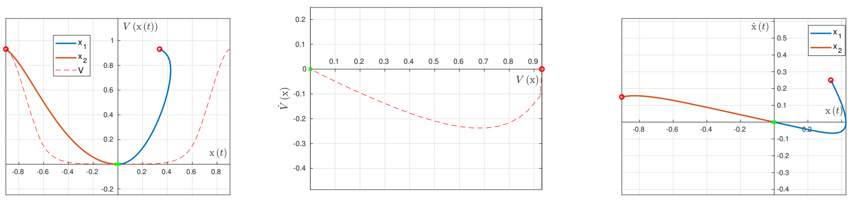
donde $\nabla(V(\mathrm{x})) = \mathrm{x}(t)^T$. Por lo establecido en la ecuación (22), **el resultado anterior debe ser definido negativo para considerar que el sistema es estable**, esto se lograría solamente si la matriz de estados A fuera definida negativa, i.e. **si la parte real de sus eigenvalores fueran negativos**, lo que permite identificar los polos del sistema al resolver la ecuación

$$\det|\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}| = 0, \tag{26}$$

siendo λ la representación de los eigenvalores de A. Para visualizar el comportamiento del sistema y su estabilidad, se considerarán los siguientes parámetros

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -1{,}4694 & -0{,}8223 \\ 0{,}1922 & -0{,}0942 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} \lambda_1 = -1{,}3428 \\ \lambda_2 = -0{,}2208 \end{cases} \quad \text{y} \quad \mathrm{x}(0) = \begin{bmatrix} 0{,}3362 \\ -0{,}9047 \end{bmatrix} \tag{27}$$

La evolución de $\mathrm{x}(t)$ y $V(\mathrm{x})$ muestran que **las condiciones iniciales $\mathrm{x}(0)$ (puntos o) delimitan la amplitud de la función candidata de Lyapunov, mientras que esta acota el comportamiento de $\mathrm{x}(t)$ hasta que alcanza el punto de equilibrio en $\mathrm{x} = 0$ (puntos ×)**



Representación gráfica de a) la Función Candidata de Lyapunov y la evolución de $\mathrm{x}(t)$, b) Retrato de fase de $V(\mathrm{x})$ y c) Retrato de fase de $\mathrm{x}(t)$

Entonces se considera que **el sistema dinámico es estable**, sin embargo, **¿con cual de los tres criterios de estabilidad cumple?**. Calcular los parámetros de las ecuaciones (13) a (15) es complicado, por lo que **Lyapunov estableció una forma simple para definir la estabilidad de un sistema basado en los resultados de las ecuaciones (20) y (22)**:

- ❑ **Estabilidad en el Sentido de Lyapunov**: se considera que un sistema dinámico cumple con este criterio de estabilidad si $\dot{V}(\mathrm{x})$ es semi-definida negativa, es decir, $\dot{V}(\mathrm{x}) \leq 0$
- ❑ **Estabilidad Asintótica**: en comparación con la anterior, si $\dot{V}(\mathrm{x})$ es definida negativa, es decir, $\dot{V}(\mathrm{x}) < 0$, entonces $\mathrm{x}(t)$ cumple con este criterio
- ❑ **Estabilidad Exponencial**: ocurre cuando $\dot{V}(\mathrm{x})$ cumple con el criterio anterior y además la respuesta del sistema $\mathrm{x}(t)$ se encuentra acotada por una función exponencial, e.g. $\mathrm{x}(t) = \mathrm{x}(0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{K}\cdot t}$

Aunque cualquiera de los tres criterios puede satisfacerse, **es común demostrar que los sistemas de control sean asintóticamente estables**, ya que esto garantiza su convergencia sin necesidad de sobre-ajustar sus parámetros para alcanzar la estabilidad exponencial, lo que minimiza el riesgo de respuestas no deseadas.