Control Adaptable

Estimación más que Predicción

Cuando se modelan sistemas como circuitos eléctricos, motores, engranes, etcétera, es posible que se utilicen los parámetros físicos proporcionados por sus fabricantes, **pero estos son obtenidos bajo condiciones específicas**, entonces, utilizarlos para controlar sistemas en cualquier ambiente puede ser contraproducente, ya que los fenómenos físicos del entorno afectan su comportamiento. Entonces, **¿cómo se pueden estimar parámetros en tiempo real para controlar un sistema correctamente?**

Puntos Clave

- **Estimación**: proceso para encontrar una aproximación a un valor real con datos de entrada (medidos en tiempo real) que pueden estar incompletos o ser inestables (e.g. valores que cambian drásticamente)
- **Predicción**: es una declaración rigurosa, a menudo cuantitativa, que pronostica lo que se observaría en condiciones específicas

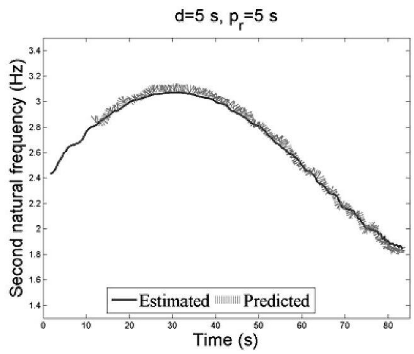
zDynamics | The Future is ROBOTICS
contact@zdynamics.org

- **Control de Sistemas Dinámicos**: Aprende las bases sobre cómo controlar, estimar y sintonizar automáticamente los parámetros de un sistema
- **Robótica, de la Cinemática al Control**: La robótica explicada más allá de las matrices de transformación homogénea. Con herramientas útiles para tu aprendizaje, investigaciones o proyectos

En el ámbito académico, las funciones de control $\mathrm{u}(t)$ son diseñadas a partir de las ecuaciones que modelan un sistema dinámico, sin embargo, **esto suele omitirse en entornos industriales ya que los controladores actuales pueden ajustarse automáticamente al estimar parámetros para ajustar la señal de control en tiempo real**.

AAB Omincore ©: controlador adaptable para robots de la marca ABB; permite estimar parámetros basándose solamente en la medición de las variables del sistema. A new era of flexible and digital robot control, ABB Asea Brown Boveri

Es necesario enfatizar que, aunque no se ha establecido formalmente la diferencia entre *estimar* y *predecir*, es común decir que **la estimación aproxima los valores de un sistema al medir sus variables en tiempo real**, mientras que **la predicción toma un conjunto de valores pasados y presentes para estimar un comportamiento futuro**



Ejemplo de *estimación* y *predicción* de la frecuencia de vibración de un ferrocarril. Debido a que la **estimación** requiere de valores medidos en tiempo real, esta puede arrojar un resultado en el primer instante de la simulación, sin embargo, la **predicción** requiere de la recolección de datos pasados para comenzar a mostrar resultados.
Prediction of Modal Parameters of Linear Time-Varying Systems, S. Marchesiello, A. Bellino and L. Garibaldi, 2010. DOI: 10.3233/SAV-2010-0542

Estas diferencias pueden ser útiles al diseñar controladores, ya que **el tiempo de respuesta para** $\mathrm{u}(t)$ **debe ser**, en la mayoría de los casos, **instantáneo**; por esta razón, en este artículo profundizaremos en la estimación de parámetros, sin embargo, existen métodos de control y predicción (como *Model Predictive Control*) que pueden utilizarse en sistemas que requieran acciones correctivas en tiempo real basados en lo que podría pasar en el futuro, e.g. vehículos autónomos.

Introducción

Al estudiar el Control No Lineal se estableció que el sistema dinámico

$$\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{Ax} + g\left(t, \mathrm{x}\right) + \mathrm{u}\left(t\right) \tag{1}$$

tiene una señal de control $\mathrm{u}\left(t\right)$ que permite eliminar el comportamiento lineal Ax y estimar el término $g\left(t, \mathrm{x}\right)$ a partir de una función $\hat{g}\left(t\right)$, es decir

$$\mathrm{u}\left(t\right) = \underbrace{-\mathrm{Ax}}_{\substack{\text{Elimina el} \\ \text{comportamiento} \\ \text{lineal}}} \overbrace{-\hat{g}\left(t\right)}^{\substack{\text{Estima y elimina} \\ \text{el comportamiento} \\ \text{no lineal}}} \underbrace{+\mathrm{K}e\left(t\right)}_{\substack{\text{Acota el} \\ \text{error}}}, \tag{2}$$

donde $e\left(t\right) = \mathrm{x}_d - \mathrm{x}$. Si el comportamiento deseado x_d es invariante en el tiempo, entonces la ecuación dinámica del error se define con las ecuaciones (1) y (2)

$$\dot{e}\left(t\right) = -\dot{\mathrm{x}} = \overbrace{\left(\mathrm{A} - \mathrm{A}\right)}^{\substack{=0 \\ \text{(Idealmente)}}} \mathrm{x} + \underbrace{\left[\hat{g}\left(t\right) - g\left(t, \mathrm{x}\right)\right]}_{\substack{\tilde{g}(t, \mathrm{x}) \to 0 \\ \text{(Idealmente)}}} - \mathrm{K}e\left(t\right). \tag{3}$$

Se debe considerar que **los parámetros en la matriz de estados son idealizados, por lo que la señal de control propuesta no elimina completamente el comportamiento del término lineal en el sistema real**. Entonces, **¿cómo se pueden conocer los parámetros reales de esta matriz y así controlar el sistema correctamente?**

Consideremos que la ecuación (2) realimenta al sistema con la **estimación** de los parámetros A, esto es

$$\mathrm{u}\left(t\right) = -\hat{\mathrm{A}}\left(t\right)\mathrm{x} - \hat{g}\left(t\right) + \mathrm{K}e\left(t\right), \tag{4}$$

siendo $\hat{\mathrm{A}}\left(t\right)$ una matriz que se ajusta con el tiempo. Entonces, esta señal de control se utiliza para reescribir la ecuación (1):

$$\begin{aligned} \dot{\mathrm{x}} &= \mathrm{Ax} + g\left(t, \mathrm{x}\right) - \hat{\mathrm{A}}\left(t\right)\mathrm{x} - \hat{g}\left(t\right) + \mathrm{K}e\left(t\right) \\ &= -\left[\hat{\mathrm{A}}\left(t\right) - \mathrm{A}\right]\mathrm{x} - \left[\hat{g}\left(t\right) - g\left(t, \mathrm{x}\right)\right] + \mathrm{K}e\left(t\right) = -\tilde{\mathrm{A}}\left(t\right)\mathrm{x} - \tilde{g}\left(t, \mathrm{x}\right) + \mathrm{K}e\left(t\right). \end{aligned} \tag{5}$$

También se reescribe la ecuación (3) como

$$\dot{e}\left(t\right) = -\dot{\mathrm{x}} = \tilde{\mathrm{A}}\left(t\right)\mathrm{x} + \tilde{g}\left(t, \mathrm{x}\right) - \mathrm{K}e\left(t\right). \tag{6}$$

En ambos resultados, el término $\tilde{\mathrm{A}}\left(t\right)$ representa la diferencia entre la estimación $\hat{\mathrm{A}}\left(t\right)$ y el valor real A, cuyo resultado no siempre será igual a cero

$$\tilde{\mathrm{A}}\left(t\right) = \hat{\mathrm{A}}\left(t\right) - \mathrm{A} \implies \dot{\tilde{\mathrm{A}}}\left(t\right) = \dot{\hat{\mathrm{A}}}\left(t\right). \tag{7}$$

Para garantizar la convergencia de $\mathrm{x}\left(t\right)$, esta estimación debe ser, al menos, semidefinida positiva, i.e. sus eigenvalores deben cumplir con:

$$\lambda_i \geq 0 \tag{8}$$

con $i = 1, 2, \cdots m$, siendo m el número de estados del sistema, que es igual al número de filas y columnas de las matrices A, $\hat{\mathrm{A}}$ y $\tilde{\mathrm{A}}$. Por otra parte, la estimación de un parámetro puede ser obtenida a partir de la Función Candidata de Lyapunov, e.g. la estimación de $g\left(t, \mathrm{x}\right)$ se obtuvo a partir del producto $\frac{1}{2}\tilde{g}\left(t, \mathrm{x}\right)^T \tilde{g}\left(t, \mathrm{x}\right)$, sin embargo, **el uso de ese término solo es útil cuando se busca estimar un vector**, ya que da como resultado un escalar. Entonces, **¿cómo se define y opera la Función Candidata de Lyapunov cuando se pretende estimar una matriz?**

#MásQueTeoría

- Un modelo en espacio de estados es aquél con un conjunto de variables de entrada, salida y estado, las cuales se relacionan entre sí mediante ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

  Cuando se utiliza una señal de control $\mathrm{u}\left(t\right)$, se asume que esta elimina el comportamiento que generan cada uno de los términos del sistema, e.g. u_1 elimina el comportamiento natural del sistema generado por la expresión $a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,m}x_m + g_1$

- Aunque los términos $a_{i,j}$ y g_i pueden definirse con constantes y funciones respectivamente, **es complicado establecer su valor con exactitud, por lo que en sistemas reales, $\mathrm{u}\left(t\right)$ no elimina el comportamiento natural del sistema por completo**, i.e. al utilizar la señal de control definida en la ecuación (2), **los valores en A y $g\left(t, \mathrm{x}\right)$ pueden cambiar de acuerdo a las condiciones del entorno donde se encuentre**, porque son afectados por fenómenos físicos como temperatura, presión, humedad, etcétera

- La Función Candidata de Lyapunov **es una función cuadrática escalar**. Para definirla a partir de una ecuación en espacio de estados, se considera que sus términos vectoriales $\mathrm{r}\left(t\right)$ pueden incluirse en la función como

$$V\left(\mathrm{r}\left(t\right)\right) = \frac{1}{2}\mathrm{r}\left(t\right)^T \mathrm{r}\left(t\right)$$

  donde $\mathrm{r}\left(t\right)^T$ es la forma transpuesta del vector $\mathrm{r}\left(t\right)$; sin embargo, una matriz no puede ser operada de esta manera, ya que daría como resultado otra matriz

#DatoDeAmor

Tal como ocurre con los vectores, la forma cuadrática de una matriz con dimensiones $m \times m$ se puede expresar como

$$\mathrm{q} = \frac{1}{2}\tilde{\mathrm{A}}^T\tilde{\mathrm{A}},$$

¡pero su resultado no es un término escalar, sino otra matriz con las mismas dimensiones! Por lo que no puede ser utilizada directamente en una Función Candidata de Lyapunov si existieran matrices a las que se busque estudiar su estabilidad ⌢̈

#MásQueTeoría

- Existen operadores que permiten obtener términos escalares a partir de una matriz, que dan como resultado un parámetro escalar, pero con un significado geométrico o físico, estos son:
  - **Determinante**: esta relacionado con el área o volumen de una región. En particular, el determinante de una matriz refleja cómo una transformación lineal asociada puede escalar o reflejar objetos
  - **Eigenvalores**: están asociados a un eigenvector, el cual representa la dirección en la que se estira un cuerpo debido a una transformación lineal, mientras que el eigenvalor es la amplitud del estiramiento
  - **Traza**: matemáticamente es la suma de los elementos en la diagonal de una matriz, sin embargo, su significado físico varía de acuerdo a su aplicación. En sistemas de control, representa la suma de los eigenvalores de una matriz

#DatoDeAmor

El producto $\tilde{\mathrm{A}}^T\tilde{\mathrm{A}}$ da como resultado una matriz con una diagonal con términos cuadráticos:

$$\tilde{\mathrm{A}}^T\tilde{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} a_{i,1}^2 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \sum_{i=1}^{m} a_{i,m}^2 \end{bmatrix};$$

por lo tanto, **utilizar su determinante o sus eigenvalores en la ecuación (9) darían como resultado términos escalares que no necesariamente serán cuadráticos**, entonces se considera obtener su traza, ya que esta toma los términos cuadráticos en la diagonal principal y los suma sin modificar el orden o valor en ellos:

$$\mathrm{tr}\left(\tilde{\mathrm{A}}^T\tilde{\mathrm{A}}\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} a_{i,j}^2.$$

Con esto, la Función Candidata de Lyapunov de una matriz $\tilde{\mathrm{A}}$ se define como

$$\begin{aligned} V\left(\tilde{\mathrm{A}}\right) &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\tilde{\mathrm{A}}^T\tilde{\mathrm{A}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(a_{1,1}^2 + \cdots + a_{m,m}^2\right), \end{aligned}$$

que se considera como la suma de la forma cuadrática de cada uno de los términos en la matriz $\tilde{\mathrm{A}}$

Estimación de Parámetros de una Matriz

Al igual que se analizó la ecuación que permite estimar el término no lineal $\tilde{g}(t,\mathrm{x})$, **es posible utilizar una Función Candidata de Lyapunov para obtener** $\tilde{\mathrm{A}}(t)$

$$V\left(e,\tilde{\mathrm{A}},\tilde{g}\right) = \frac{1}{2}\left[e^Te + \tilde{g}^T\tilde{g} + f\left(\tilde{\mathrm{A}}^T\tilde{\mathrm{A}}\right)\right], \tag{9}$$

donde $f\left(\tilde{\mathrm{A}}^T\tilde{\mathrm{A}}\right)$ **representa a una función escalar obtenida a partir de la forma cuadrática de** $\tilde{\mathrm{A}}$; además, su derivada en función del tiempo es

$$\dot{V}\left(e,\tilde{\mathrm{A}},\tilde{g}\right) = e^T\dot{e} + \dot{\tilde{g}}^T\tilde{g} + f\left(\dot{\tilde{\mathrm{A}}}^T\tilde{\mathrm{A}}\right). \tag{10}$$

Posteriormente se sustituye la ecuación (6), lo que da como resultado

$$\begin{aligned} \dot{V}\left(e,\tilde{\mathrm{A}},\tilde{g}\right) &= e^T\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{x} + e^T\tilde{g}(t,\mathrm{x}) - e^T\mathrm{K}e(t) + \dot{\tilde{g}}^T\tilde{g} + f\left(\dot{\tilde{\mathrm{A}}}^T\tilde{\mathrm{A}}\right) \\ &= -\overbrace{e^T\mathrm{K}e}^{\substack{\text{Garantiza la}\\ \text{estabilidad asintótica}}} + \underbrace{e^T\tilde{g}(t,\mathrm{x}) + \dot{\tilde{g}}^T\tilde{g}}_{=0 \implies \dot{\tilde{g}}(t,\mathrm{x}) = -e(t)} + \overbrace{e^T\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{x} + f\left(\dot{\tilde{\mathrm{A}}}^T\tilde{\mathrm{A}}\right)}^{=0 \implies f\left(\dot{\tilde{\mathrm{A}}}^T\tilde{\mathrm{A}}\right) = -e^T\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{x}}. \end{aligned} \tag{11}$$

Para considerar que $e(t)$ es asintóticamente estable, **la matriz** K **debe ser definida positiva**; asimismo, $\tilde{\mathrm{A}}(t)$ y $\tilde{g}(t,\mathrm{x})$ **pueden calcularse al considerar que los términos señalados son iguales a cero**. Ya que $\dot{\tilde{g}}(t,\mathrm{x})$ es conocido, se debe definir a $f\left(\dot{\tilde{\mathrm{A}}}^T\tilde{\mathrm{A}}\right)$, asumiendo que el operador $f(\cdot)$ representa la traza de una matriz $\mathrm{tr}(\cdot)$, esto es

$$\mathrm{tr}\left(\dot{\tilde{\mathrm{A}}}^T\tilde{\mathrm{A}}\right) = -e^T\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{x}. \tag{12}$$

Una de las propiedades de los términos escalares obtenidos a partir del producto $\mathrm{v}^T\mathrm{M}\mathrm{w}$ (donde v y w son vectores, mientras que M es una matriz) es que su resultado es el mismo que al obtener su traza, es decir

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\left(e^T\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{x}\right) = e^T\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{x} &= \sum_{i=1}^{m}\left[x_i\left(\sum_{j=1}^{m} a_{j,i}\cdot e_j\right)\right] \\ &= x_1\left(a_{1,1}e_1 + \cdots + a_{m,1}e_m\right) + \\ &\quad \cdots + x_m\left(a_{1,m}e_1 + \cdots + a_{m,m}e_m\right); \end{aligned} \tag{13}$$

entonces, la ecuación (12) se reescribe de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\left(\dot{\tilde{\mathrm{A}}}^T\tilde{\mathrm{A}}\right) &= -\mathrm{tr}\left(e^T\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{x}\right) \\ \mathrm{tr}\left(\dot{\tilde{\mathrm{A}}}^T\tilde{\mathrm{A}}\right) + \mathrm{tr}\left(e^T\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{x}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Se debe destacar que **la traza del producto entre dos o más matrices es conmutativa**, es decir, $\mathrm{tr}\left(\mathrm{v}^T\mathrm{M}\mathrm{w}\right) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{w}\mathrm{v}^T\mathrm{M}\right)$; además, la suma $\mathrm{tr}(\mathrm{D}) + \mathrm{tr}(\mathrm{F}) = \mathrm{tr}(\mathrm{D}+\mathrm{F})$, por lo tanto, la ecuación anterior se convierte en

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\left(\dot{\tilde{\mathrm{A}}}^T\tilde{\mathrm{A}}\right) + \mathrm{tr}\left(\mathrm{x}e^T\tilde{\mathrm{A}}\right) &= 0 \\ \mathrm{tr}\left(\dot{\tilde{\mathrm{A}}}^T\tilde{\mathrm{A}} + \mathrm{x}e^T\tilde{\mathrm{A}}\right) &= 0 \\ \mathrm{tr}\left(\left(\dot{\tilde{\mathrm{A}}}^T + \mathrm{x}e^T\right)\tilde{\mathrm{A}}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

La forma más simple para que se cumpla la igualdad en la ecuación anterior es considerar que

$$\dot{\tilde{\mathrm{A}}}^T + \mathrm{x}e^T = 0 \implies \dot{\tilde{\mathrm{A}}} = \dot{\hat{\mathrm{A}}} = -e(t)\,\mathrm{x}(t)^T, \tag{16}$$

lo que da como resultado una matriz que estima el valor de A conforme el tiempo avanza, pero, si $f\left(\dot{\tilde{\mathrm{A}}}^T\tilde{\mathrm{A}}\right) = 0$, **¿la estimación nunca será asintóticamente estable?**

(Brevísimo) Análisis de de Sistemas Variantes en el Tiempo

Este análisis permite demostrar la estabilidad asintótica para sistemas que varían en el tiempo; está basado en el Lema de Barbalat, el cual enuncia que

"Si $f(t)$ tiene un límite finito cuando $t \to \infty$ y $\dot{f}(t)$ es uniformemente continua (o $\ddot{f}(t)$ está acotada), entonces $\dot{f}(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$."

Esto significa que $f(t)$ será asintóticamente estable si $f(t)$ y $\dot{f}(t)$ se encuentran acotadas, además que $f(t)$ debe estar acotada al ser integrada en su forma cuadrática, i.e. la integral $\int_0^{+\infty} f(t)^2\,dt$, $\int_0^{+\infty} f(t)^T f(t)\,dt$ o $\int_0^{+\infty} \operatorname{tr}\left(f(t)^T f(t)\right) dt$ debe existir. Con toda esta teoría, **¿cómo se puede demostrar que una función variante cumple con las condiciones anteriores?**

- **Función Acotada**: se **asume** que $\mathrm{u}(t)$ acota el comportamiento del sistema dinámico, por lo tanto **esta acotará todos los términos en un sistema dinámico**, e.g. al utilizar la estimación $\hat{\mathrm{A}}(t)$ en la señal de control, esta se encuentra acotada debido a $\mathrm{u}(t)$

- **Función Integrable en Forma Cuadrática**: tal como se mostró en el Análisis de Estabilidad, l**a Función Candidata de Lyapunov puede definirse a partir de una integral en función de la variable de estado** x, cuyo resultado es definido positivo debido a la naturaleza de las funciones cuadráticas. Asimismo, para garantizar que el sistema es asintóticamente estable, esta debe estar acotada cuando es integrada en función del tiempo, es decir

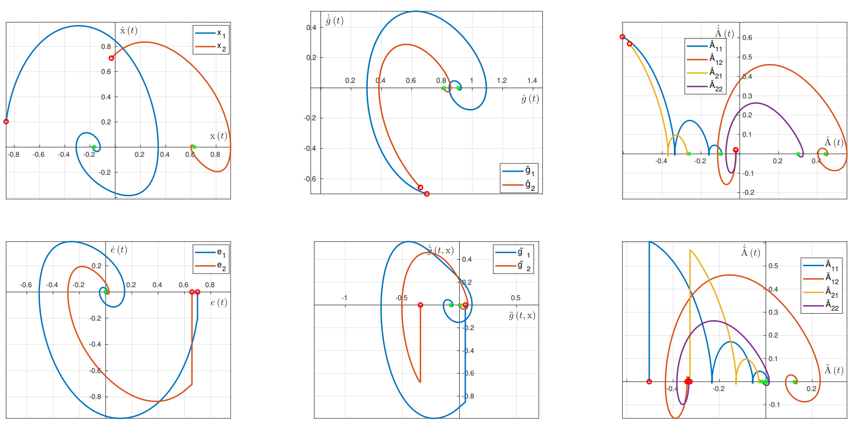
$$V(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t)^2\,dt < \infty; \tag{17}$$

  asumiendo que analizamos la estimación $\hat{\mathrm{A}}(t)$, si está acotada, entonces se puede calcular la integral de su forma cuadrática numéricamente y, si esta también se encuentra acotada, la estimación es asintóticamente estable.

Para visualizar el comportamiento de la estimación, se utilizarán las ecuaciones (3), (11) y (16), así como los siguientes parámetros del sistema dinámico:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -0{,}1022 & 0{,}3192 \\ -0{,}2414 & 0{,}3129 \end{bmatrix}; \begin{cases} \lambda_1 = 0{,}1053 + 0{,}1844i \\ \lambda_2 = 0{,}1053 - 0{,}1844i \end{cases} \quad \text{y } \mathrm{x}(0) = \begin{bmatrix} -0{,}8649 \\ -0{,}0301 \end{bmatrix}$$

Se observa que $\mathrm{x}(t)$ alcanza el punto deseado $\mathrm{x}_d = [-0{,}1649\ 0{,}6277]^T$ ya que $\hat{g}(t)$ y $\hat{\mathrm{A}}(t)$ **estiman** los valores de sus términos correspondientes, pero solamente acotan su comportamiento a través de $\tilde{g}(t,\mathrm{x})$ y $\tilde{\mathrm{A}}(t)$; sin embargo, $e(t)$ converge.



Retratos de fase de a) $\mathrm{x}(t)$, b) $\hat{g}(t)$, c) $\hat{\mathrm{A}}(t)$, d) $e(t)$, e) $\tilde{g}(t,\mathrm{x})$ y f) $\tilde{\mathrm{A}}(t)$

Cuando únicamente se estimaba el término no lineal, $\tilde{g}(t,\mathrm{x})$ **era igual a cero, ya que** $\hat{g}(t)$ **eliminaba el comportamiento real**, sin embargo, **esto no siempre ocurrirá ya que el cálculo de las estimaciones**, utilizando la ecuación (9), **garantiza que los resultados harán que la ecuaciones (9) y (11) serán definida positiva y negativa respectivamente**, lo que asegura la estabilidad asintótica del sistema.

#MásQueTeoría

- Los Sistemas Variantes en el Tiempo son aquellos cuya respuesta de salida depende del momento de aplicación y medición de la señal. Los sistemas que varían en el tiempo responden de manera diferente a la misma entrada en diferentes momentos

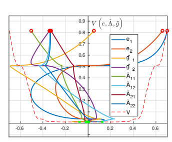
- Las Funciones Adaptables evolucionan en el tiempo y se adaptan a un sistema basadas en sus señales de entrada, e.g. la estimación $\hat{g}(t)$ evoluciona debido a $e(t)$ hasta encontrar el valor real de $g(t,\mathrm{x})$, o se ajusta para que $\tilde{g}(t,\mathrm{x})$ sea un vector con valores negativos, lo que permite acotar el comportamiento natural de $\mathrm{x}(t)$

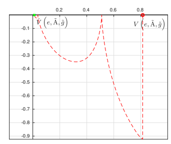
#DatoDeAmor

Para ejemplificar el Lema de Barbalat, supongamos que $f(t)$ representa la posición de un vehículo; **esta sería asintóticamente estable si estuviera acotada en cualquier instante**, i.e. el vehículo se mantiene dentro de un camino o carril, además que su velocidad $\dot{f}(t)$ pudiese ser calculada durante todo el trayecto; entonces, la posición $f(t)$ alcanzaría un punto de equilibrio cuando la velocidad $\dot{f}(t) = 0$

Conclusión

Estimar parámetros utilizando una Función Candidata de Lyapunov es muy sencillo y, aunque no se profundizó en el Análisis de Estabilidad de Sistemas Variantes en el Tiempo, la simulación numérica muestra que la ecuación (9) es definida positiva, mientras que ecuación (11) es definida negativa:





¡Esto significa que el error y las estimaciones son asintóticamente estables! ◡̈

¡Queremos ayudarte!

Escríbenos a contact@zdynamics.org o envíanos un mensaje por WhatsApp al +523320807567 si quieres que te apoyemos con la investigación y desarrollo de tus proyectos